談正反比例的教學 —— 為何不用歸一法？

梁子傑
天主教鳴遠中學

序

經過二十多年的抗議和爭取之後，正反比例這課題終於能夠重回中小學的數學課程之中。這本應是一件可喜可賀的事情。不過，由於在過去的 20 多年中，無論是小學或者是中學的數學課堂裡，基本上都沒有正式教授過有關的內容，因此莫說新一代的數學教師，即使具有超過 15 年教學經驗的教師，應該對這部分的內容亦會感到陌生。再加上這個課題本身都有一定的難度，稍一不慎，當在課堂講解時出現了甚麼差池，那麼無論是學或者是教的人，都會感到痛苦。可以預料，正反比例這課題將會是新數學課程中的一個難點（這亦是當年從舊課程移除這個課題的原因之一！）。

有新的課程自然會有新的教科書。筆者在近日收到各出版社所編寫的新教科書，特意翻看有關正反比例的內容，發覺所有書本雖然都能正確地解釋正反比例的意思，當中的例子亦能夠清楚闡述每一個計算步驟，但卻流於機械性的操作，而忽略了探討操作背後的原理。如此的課本內容，真的會幫助教師去教、學生去學嗎？

一般教科書的處理辦法

在介紹正反比例的概念時，一般教科書都是從一個例子開始，透過列表展示一系列的數字讓學生觀察，從而得出正比例有關係式 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ 及反比例有關係式 $a_1b_1 = a_2b_2$ 的結論。接着就是例子。其中正比例的例子有「3 個蘋果值 18 元，問 5 個蘋果值多少元？」，反比例的例子有「5 個工人需 8 天完成一項工程，問 4 個工人需多少天完成同一項工程？」之類的問題。

值得留意的是教科書如何解這些習題。一般來說，教科書都是應用前面提及的關係式，先建立方程，然後從解方程來求得答案。例如前面的正比例問題，教科書的解如下：

設 5 個蘋果值 x 元。

由正比例關係式得

$$\frac{x}{5} = \frac{18}{3}$$
$$x = \frac{18}{3} \times 5$$
$$= 30$$

$\therefore$ 5 個蘋果值 30 元。

另外，前面反比例問題的解如下。

設 4 個工人需 x 天完成同一項工程。

由反比例關係式得

$$4x = 5 \times 8$$
$$x = \frac{5\times 8}{4}$$
$$= 10$$

$\therefore$ 4 個工人需 10 天完成同一項工程。

回看上述的兩個解，其實都是一系列的機械化步驟。

筆者其實亦發現另一個重要的問題，就是一般教科書都將正比例和反比例的例子和習題分配入不同的分段之中，從沒有正式與學生討論如何區分兩類的題目。這令人不禁要問：做完書中的所有習題，學生真的懂得正反比例的真正意義嗎？他們能夠分辨正反比例嗎？

一個建議：採用「歸一法」

將正反比例的習題化為機械化的計算，無疑令學生「有所適從」，亦容易達到教學目的。不過此舉必定令學習變得枯燥，學生的記憶亦不會持久。

個人認為，一個有趣、具挑戰性的學習方法十分重要。而解決正反比例問題的最佳辦法應該是歸一法。所謂「歸一法」，就是將題目中其中一個變數「歸一」，即問當一個變數變成 1 時，另一個變數會是多少？然後按照這個數計算題目所求的數值。又以前面正比例一題為例：「3 個蘋果值 18 元，問 5 個蘋果值多少元？」在回答 5 個蘋果值多少錢這問題之前，先回答 **1** 個蘋果值多少錢？既然 3 個蘋果值 18 元，那麼 1 個蘋果應該值 $18 \div 3 = 6$ 元（我相信，一個具正常能力的初中學生一定能正確地回答這個問題）。於是，5 個蘋果便值 $6 \times 5 =$ 30 元。

又以前面反比例一題為例：「**5 個工人需 8 天完成一項工程，問 4 個工人需多少天完成同一項工程？**」先想想：如果只得 **1** 個工人，那麼他需時多久才能完成這項工程呢？如果 5 個工人需時 8 天完成一項工程，即是說 1 個工人在 8 天內只會完成工程的 $\frac{1}{5}$，那麼 1 個工人需時 $8 \times 5 = 40$ 天才能完成這項工程。如果有 4 人分擔這項工程，那麼便要 $40 \div 4 =$ <u>10 天</u>了。

如果大家細仔地比較上述的計算和前面以解方程進行的計算步驟，那麼不難發現，在數字上，兩者皆完全相同！不過，上述的計算卻能為每一個步驟添上一層意義，令學生對他們所進行的運算有進一步的了解。

另外，歸一法亦可加強學生分析和推理的能力。例如當完成上述例子的計算之後，教師其實亦可以反問學生：我們是否只可以將蘋果的數量或人數歸一呢？我們可否將錢或工程日數歸一呢？透過這類提問加強學生對歸一法的反思和認識。事實上，將錢歸一，即是問 1 元能買多少個蘋果？答案是 $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ 個（當然，這個答案有點古怪）。接着，因為 5 個蘋果可以分成 $5 \times 6 = 30$ 個 $\frac{1}{6}$，所以 5 個蘋果值 30 元。同樣，5 個工人需 8 天完成一項工程，如果將工程日數改成 1 天，那麼我們便需要 $5 \times 8 = 40$ 個工人。但現在只有 4 個工人，所以我們便需要 $40 \div 4 = 10$ 天了。

<u>區分正反比例</u>

前面提過，在目前的教科書中，很少討論如何區分正反比例的活動。相信大家同意，透過上述歸一法的分析和討論，學生應該可以很自然地了解到，有一類的習題應該先除後乘（那是正比例），另一類卻先乘後除（那是反正例），從而學會區分正反比例的方法。

事實上，正比例給予人一種無限擴展的可能性。譬如 1 個蘋果值 6 元，那麼 3 個值 18 元、5 個值 30 元 …… 等等。相反，反比例卻建基於一個固定的範圍之下。譬如一項工程，無論我們有多少個工人或者多少個工作天，我們的目的都是要完成一項工程。這項工程就是我所指的「範圍」了。

<u>一個主張</u>

本人明白，採用歸一法可能會令教學時間加長，它不像解方程那樣直接、快捷。但教導學生不可能只追求效率，有時讓學生學得深入一點，令

他們有深刻的記憶，或許可以減省他們將來溫習有關內容的時間。況且，本人並非排除或反對學生採用解方程的辦法，而是認為應該先讓學生明白正反比例的背後意義，當他們很自然地消化和接受課本中提及關於正反比例的兩個關係式之後，才進一步引入方程。或者可以這樣說：當學生經討論、分析和反思之後，我們才引入解方程，使它成為處理正反比例習題的「終極方案」。

終極方案

筆者是在上世紀 70 年代初入讀小學的，那是新數、舊數之爭的大時代，曾經見證過老師有一天突然沒有上課，據說去了學習「新數」，然後翌日回來，在課堂中教授集合論的日子。坦白說，筆者對於在小學中學習數學（當年稱這科目為「算術」）的記憶已經十分模糊，不過即使到了今天，我依然能夠清楚地記得小學老師教我們處理正反比例的計算方法。

以「3 個蘋果值 18 元，問 5 個蘋果值多少元？」為例。首先，將同類的數量上下排好，如下圖。

	蘋果數量	價值	
$\uparrow$	3	18	$\uparrow$
	5	x	

分析題目，如果是正比例，那麼便在數值兩旁畫上相同方向的箭號。箭頭是分子，箭末是分母，寫出方程如下：

$$\frac{3}{5} = \frac{18}{x}$$

解方程得 $x = 30$，即 5 個蘋果值 30 元。

又以「5 個工人需 8 天完成一項工程，問 4 個工人需多少天完成同一項工程？」為例。同樣，將同類的數量上下排好，如下圖。

	工人數目	工作天數	
$\uparrow$	5	8	$\downarrow$
	4	x	

由於這習題是反比例，因此在數值兩旁畫上相反方向的箭號。同樣，箭頭是分子，箭末是分母，寫出方程如下：

$$\frac{5}{4} = \frac{x}{8}$$

解方程得　　　　　　　$x = 10$，即需時 10 天。

個人覺得，這個方法清脆利落，它不單採用了相近的形式（而非一個以乘、另一個以除的不對等形式）來解決兩類問題，而且同向箭號和反向箭號更能反映「正比」和「反比」這兩個名稱的由來，實在是一石二鳥，恰到好處。

不過，筆者在這裡一再強調，上述方法應該是解決正反比例問題的「終極方案」。當學生熟悉前面提過的歸一法和教科書上設和解方程的方法之後，才應該引入這方案；否則就是捨本逐末，本末倒置，對學生學好這一課題反而是有害無益的。

作者電郵：jckleung@netvigator.com

本校梁子傑老師的最新數學教育論著，刊於《數學教育》第 42 期，由香港數學教育學會於 2020 年 6 月出版。本文獲該學會同意授權轉載。